# Kochrezept zum Beweis, dass eine Sprache aus TM nicht entscheidbar ist

## *Disclaimer*

Die hier angeführten Verfahrensweisen sind auf meinem eigenen Mist gewachsen. Sie sind kein offizielles Material zur Vorlesung Informatik III bei Prof. Albers. Sie sind nicht verifiziert worden oder in irgend einer Weise auf Korrektheit geprüft. Sie wurden nach bestem Wissen und Gewissen angefertigt, aber der Teufel ist ein Eichhörnchen und der Fehlerteufel manchmal schwer zu finden. Auf gut Deutsch: Keine Garantie und auch keine Berufungsmöglichkeit auf dieses Dokument!

## *Definition*

Eine Sprache $L$ sei gegeben. Es ist zu beweisen, dass $L$ nicht entscheidbar ist, d.h., dass man nicht für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ entscheiden kann, ob $w \in L$ oder $w \notin L$ ist. Der direkte Beweis ist sehr schwierig, daher benutzt man ein anderes Verfahren:

## *Vorgehensweise*

Der Beweis wird in aller Regel als Widerspruchsbeweis geführt. Das heißt, dass man davon ausgeht, die Sprache $L$ sei entscheidbar. Man wählt eine Sprache $L'$, von dem man bereits weiß, dass sie nicht entscheidbar ist (in aller Regel das allgemeine Halteproblem: Ist ein beliebiges $<M>x \in H$, wobei $H = \{<M>x \mid M \textit{ angesetzt auf } x \textit{ hält}\}$ ?). Dann zeigt man, dass man mittels einer Lösung für das Entscheidungsproblem zu $L$ für ein beliebiges Wort $w$ entscheiden kann, ob $w \in L'$ ist. Wir wissen, dass das nicht möglich ist, also kann das Entscheidungsproblem zu $L$ nicht gelöst werden.
Man hat also ein Wort $w$ gegeben, und konstruiert damit eine TM $M'$ (wobei diese Konstruktion vollständig TM-berechenbar sein muss). $M'$ soll genau dann in der Sprache $L$ liegen, wenn $w$ in $L'$ liegt (im Beispiel: $<M>x \in H$ ist). Da ich angenommen habe, dass $L$ entscheidbar sei, kann ich nun auch das alte Problem (im Beispiel: $H$) entscheiden. Ich weiß aber, dass ich das eben nicht entscheiden kann $\Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow$ Meine Annahme war falsch $\Rightarrow$ Die neue Sprache ist auch nicht entscheidbar.

## *Was genau ist zu tun, und wie tut man's?*

Um nun zu beweisen, dass die Sprache $L$ nicht entscheidbar ist, genügt es (umrahmt von einigen erklärenden Sätzen zum Vorgehen), diese TM $M'$ anzugeben, wobei eine informelle Beschreibung der Funktionsweise ausreicht. Wie kommt man aber auf diese TM $M'$ ? Dafür gibt es leider kein allgemeingültiges Verfahren, aber mit etwas Übung und der Kenntnis diverser Beispiele bekommt man ein Auge für das Vorgehen – zumindest in den einfacheren Fällen.
Noch ein wichtiger Hinweis: Wir beschreiben eine TM $M'$, die aus einem Wort $w$ konstruiert wird. Dieses Wort $w$ ist völlig unabhängig von der Eingabe, mit der $M'$ gestartet wird!
Daher folgen nun einige Beispiele, anhand derer man diese Beweisstruktur nachvollziehen kann. Es empfiehlt sich natürlich, sich zunächst selbst an den jeweils gestellten Problemen zu versuchen.
Die meisten Beispiele dürften aus der Vorlesung bzw. den Übungen bekannt sein, aber man (bzw. Prof. Hilke) sagt ja: „Lernen ist ständige Wiederholung“.

## *Beispiele*

Ist $L_\varepsilon$ = *{ <M> | M angesetzt auf das leere Wort hält }* entscheidbar?

1. Die Wahl des bekannten Problems fällt in diesem Falle auf *H*. *H* akzeptiert Wörter der Form <*M*>*x*, wir konstruieren *M'* also ausgehend von einem Wort dieser Form.
2. Unsere TM *M'* erwartet eine Eingabe <*M'*> und es lässt sich entscheiden, ob dieses M angesetzt auf das leere Wort hält.
3. Konstruktion von *M'* in Abhängigkeit von <*M*>*x*, der Eingabe zu *H*:
   3.1. *M'* löscht seine Eingabe vom Band. (sicherlich TM – berechenbar)
   3.2. *M'* schreibt *x* auf das Band. (sicherlich TM – berechenbar)
   3.3. *M'* simuliert *M*. (*M* ist eine TM, somit TM – berechenbar)
4. Was geschieht jetzt? Wenn *M* auf *x* hält, so hält *M'* auf dem leeren Wort, wenn *M* auf *x* nicht hält, hält *M'* auch nicht auf dem leeren Wort. Wenn ich also entscheiden kann, ob *M'* angesetzt auf das leere Wort hält, entscheide ich damit, ob *M* angesetzt auf *x* hält, für beliebige <*M*>*x* wohlgemerkt! Damit wäre *H* entscheidbar, ist es aber nicht ⇒ Widerspruch ⇒ die Annahme war falsch ⇒ $L_\varepsilon$ ist auch nicht entscheidbar.

Ist *L = { <M> | M hält für endlich viele Eingaben }*

1. Das ist etwas schwieriger, hier entscheiden wir uns für *Ħ* = $\Sigma^* \setminus H$ als bekanntermaßen unentscheidbares Problem. (Sorry, ich finde gerade kein H mit dem Strich darüber, daher muss das oben durchgestrichene H tun. Wer sagt, dass das in Latex kein Problem wäre, darf das nächste Beweisschema tippen).
2. Unsere TM *M'* erwartet eine beliebige Eingabe, darf aber nur für endlich viele halten.
3. Vorüberlegung: In *Ħ* sind einerseits alle Wörter enthalten, die nicht die Form <*M*>*x* haben, sowie alle Wörter der Form <*M*>*x*, für die gilt, das *M* angesetzt auf *x* nicht hält. In beiden Fällen soll *M'* endlich viele Wörter akzeptieren. Wenn aber die Eingabe die Form <*M*>*x* hat und *M* angesetzt auf *x* hält, so soll *M'* unendlich viele Wörter akzeptieren. Jetzt sollte einem auffallen, dass man wenn man *M'* unabhängig von der Eingabe *M* auf *x* rechnen lässt, *M'* schon fast richtig läuft. Denn:
   3.1. Hält *M* auf *x*, so akzeptiert *M'* alle (somit unendlich viele) Wörter.
   3.2. Hält *M* nicht auf *x*, so akzeptiert *M'* kein einziges (somit endlich viele) Wörter.
   3.3. Bleibt noch der Fall, dass die Eingabe *w* gar nicht die Form <*M*>*x* hat. Dann will man endlich viele Wörter akzeptieren.
4. Konstruktion der TM *M'* (ausgehend von der Eingabe *w*, für die entschieden werden soll, ob $w \in$ *Ħ* ist.
   4.1. Zunächst kontrolliert *M'*, ob *w* die Form <*M*>*x* hat. Falls nicht, geht *M'* in eine Endlosschleife über. Damit akzeptiert *M'* in diesem Fall kein einziges (also endlich viele) Wörter.
   4.2. Ist *w* von der Form <*M*>*x*, so wird *M* auf *x* gestartet. Hält *M*, so akzeptiert *M'* jede Eingabe (da es völlig unabhängig von der eigenen Eingabe nur auf <*M*>*x* achtet). Hält *M* nicht, so akzeptiert es keine Eingabe.
5. Wenn wir also *L* entscheiden können, und wollen feststellen, ob ein Wort $w \in$ *Ħ* ist, dann konstruieren wir daraus obige TM *M'*. Danach entscheiden wir, ob $M' \in L$ ist, falls ja, ist $w \in$ *Ħ*, falls nicht eben nicht. Somit haben wir *Ħ* entschieden. Das ist nicht möglich ⇒ Widerspruch ⇒ die Annahme war falsch ⇒ $L_\varepsilon$ ist auch nicht entscheidbar.